Heilbronn, den 14.5.2010 Prof. Dr. V. Stahl WS 10/11

Übungen zu Logik und Künstliche Intelligenz

Blatt 8

Aufgabe 1. Überlegen Sie, wie man folgende Relationen R grafisch darstellen könnte und entscheiden Sie, ob die Relationen reflexiv auf A, symmetrisch bzw. transitiv sind. Geben Sie eine kurze Begründung.

$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, a \neq b\}$,	$A = \mathbb{Z}$
$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a + b = 1\}$,	$A = \mathbb{R}$
$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a^2 < b^2\}$,	$A = \mathbb{R}$
$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a^3 = b^3\}$,	$A = \mathbb{R}$
$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}_0, a - b$ ist gerade $\}$,	$A = \mathbb{N}_0$
$R = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N}_0, a - b$ ist ungerade $\}$,	$A = \mathbb{N}_0$
$R = \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\}$,	$A = \{1, 2, 3\}$
$R = \{(2, 1), (3, 2), (3, 1)\}$,	$A = \{1, 2, 3\}$
$R = \emptyset$,	$A = \mathbb{N}$
$R = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,	$A = \mathbb{N}$

Aufgabe 2. Sei R eine Relation. Die Umkehrrelation R^{-1} von R ist definiert durch

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid bRa\}.$$

Das heißt $(a, b) \in R^{-1}$ genau dann wenn $(b, a) \in R$.

- Was ist die Umkehrrelation von $>_{\mathbb{N}}$ und $\equiv_3$?
- Zeigen Sie, dass wenn R reflexiv auf A ist, auch R^{-1} reflexiv auf A ist.
- Zeigen Sie, dass wenn R symmetrisch ist, auch R^{-1} symmetrisch ist.
- Zeigen Sie, dass wenn R transitiv ist, auch R^{-1} transitiv ist.
- Zeigen Sie, dass für jede Relation R gilt, dass die Relation $R' = R \cup R^{-1}$ symmetrisch ist.

Aufgabe 3. Finden Sie eine Relation R und eine Menge A so dass

- R reflexiv auf A ist aber weder symmetrisch noch transitiv.
- R zwar symmetrisch aber weder reflexiv auf A noch transitiv ist.
- R zwar transitiv aber weder reflexiv auf A noch symmetrisch ist.
- R weder reflexiv auf A noch symmetrisch noch transitiv ist.

Hinweis: Es ist einfacher wenn man mit Relationen auf einer endlichen Menge z.B. $\{1, 2, 3\}$ spielt.

Aufgabe 4. Wie kann man am Schaubild einer Relation $R \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sofort ablesen ob sie reflexiv ist? Woran sieht man dass sie symmetrisch ist? Hinweis: Zeichnen Sie zuerst ein paar reflexive bzw. symmetrische Relationen und suchen dann die Gemeinsamkeiten. (Transitivität lässt sich nicht so direkt sehen, denken Sie aber trotzdem mal darüber nach).

Aufgabe 5. Prüfen Sie ob folgende Relationen reflexiv auf $\mathbb{N}_0$, symmetrisch oder transitiv sind:

- $\equiv_3 \cup \leq_{\mathbb{N}}$
- $\equiv_3 \setminus \leq_{\mathbb{N}}$
- $\leq_{\mathbb{N}} \setminus \equiv_3$
- $\equiv_3 \cap \leq_{\mathbb{N}}$

Aufgabe 6. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt antisymmetrisch, wenn

für alle x, y gilt
wenn xRy und yRx
dann ist $x = y$.

So ist z.B. die Relation $\leq_{\mathbb{N}}$ antisymmetrisch, denn aus $x \leq_{\mathbb{N}} y$ und $y \leq_{\mathbb{N}} x$ folgt $x = y$. Welche der folgenden Relationen sind antisymmetrisch?

$$<_{\mathbb{N}},\ \geq_{\mathbb{Z}},\ \sigma,\ \equiv_3,\ \subseteq,\ \emptyset,\ \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ = .$$

Beschreiben Sie, wie man allgemein vorgeht um von einer Relation R zu entscheiden ob sie antisymmetrisch ist und wie ein Beweis der Antisymmetrie beginnen würde.

Aufgabe 7. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt Halbordnung auf A, wenn R reflexiv auf A, transitiv und antisymmetrisch ist. Welche der folgenden Relationen sind Halbordnungen?

- $\leq_{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$.
- $<_{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$.
- $\geq_{\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{Z}$.
- σ auf $\mathbb{N}$.
- $\equiv_3$ auf $\mathbb{N}_0$.
- $\subseteq$ auf der Menge aller Mengen.
- $\emptyset$ auf $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$.

- $=_{\mathbb{Q}}$ auf $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 8. Eine Relation $R \subseteq A \times A$ heißt totale Ordnung auf A, wenn R Halbordnung ist und außerdem je zwei Elemente von A vergleichbar sind, d.h.

$$\begin{aligned} &\text{für alle } x, y \text{ gilt} \\ &\qquad \text{wenn } x, y \in A \\ &\qquad \text{dann } xRy \text{ oder } yRx. \end{aligned}$$

Welche der folgenden Relationen sind totale Ordnungen?

- $\leq_{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$.
- $<_{\mathbb{N}}$ auf $\mathbb{N}$.
- $\geq_{\mathbb{Z}}$ auf $\mathbb{Z}$.
- σ auf $\mathbb{N}$.
- $\equiv_3$ auf $\mathbb{N}_0$.
- $\subseteq$ auf der Menge aller Mengen.
- $\emptyset$ auf $\mathbb{N}$.
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ auf $\mathbb{N}$.
- $=_{\mathbb{Q}}$ auf $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 9. Finden Sie jeweils 3 Elemente der Mengen

$$<_{\mathbb{N}} \times \geq_{\mathbb{Z}}$$
$$(\equiv_3)^2$$

Aufgabe 10. Für jede Relation R ist die Umkehrrelation R^{-1} definiert durch

$$R^{-1} = \{(a, b) \mid bRa\}.$$

Beweisen Sie ausführlich, dass für jede symmetrische Relation R gilt

$$R^{-1} = R.$$

Aufgabe 11. Die Kleiner Relation auf $\mathbb{N}$ ist definiert durch

$$<_{\mathbb{N}} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N} \wedge \exists z \in \mathbb{N}\; x + z = y\}.$$

Beweisen Sie ausführlich, dass $<_{\mathbb{N}}$ transitiv ist.

Aufgabe 12. Lesen Sie im Skript nach was eine Zerlegung ist. Finden Sie alle Zerlegungen der Menge

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Aufgabe 13. Überlegen Sie sich ein paar Beispiele, wo Zerlegungen in der "wirklichen Welt" vorkommen. Zum Beispiel wird die Menge der Menschen oft zerlegt in Männer und Frauen oder in Kinder, Jugendliche, Erwachsene oder in Europäer, Amerikaner, Asiaten, Afrikaner, Australier, usw.

Aufgabe 14. Berechnen Sie eine Zerlegung der Menge

$$\{1,2\} \times \{1,2,3\}$$

mit 4 Elementen.

Aufgabe 15. Finden Sie eine Zerlegung Z_1 der Menge $\mathbb{N}$ und eine Zerlegung Z_2 der Menge $\mathbb{Z}$ so dass $Z_1 \subseteq Z_2$.

Aufgabe 16. Lesen Sie im Skript nach was eine Äquivalenzrelation und eine Äquivalenzklasse ist. Gegeben ist die Menge $A = \{1,2,3\}$. Finden Sie 3 Äquivalenzrelationen auf A und geben Sie deren Äquivalenzklassen an. Wieviele Äquivalenzrelationen gibt es insgesamt auf A?

Aufgabe 17. Wenn $x \in A$ und $A = B$ ist, dann ist offensichtlich auch $x \in B$. Beweisen Sie diese Aussage ausführlich, indem Sie nur die in der Vorlesung besprochenen Beweisschritte und Definitionen (Mengengleichheit, Teilmengenbeziehung) verwenden. Schreiben Sie zuerst die zu zeigende Aussage als Formel der Prädikatenlogik hin und machen Sie deutlich an welcher Stelle Sie Modus Ponens verwenden.

Aufgabe 18. Etwas aus der Praxis...: Lesen Sie den Artikel "Programs with Common Sense" von John McCarthy (siehe Webseite zur Vorlesung unter Links & Literatur). Es handelt sich um eine Veröffentlichung aus der Anfangszeit der KI, die jedoch wegweisend für viele spätere Arbeiten war. McCarthy definiert eine Relation "at", wobei

$$\mathrm{at}(x,y)$$

bedeutet, dass x in der Nähe von y ist. Begründen Sie, weshalb McCarthy behauptet, dass "at" transitiv ist und weshalb er dafür von Prof. Y. Bar-Hillel kritisiert wird. Wenn die Welt, über die der advice taker nachdenken kann, nur aus den Objekten "I", "car", "airport", "desk" und "home" bestehen würde, wäre "at" dann transitiv? Überlegen Sie sich, wie man die Relation "at" exakt definieren könnte, so dass sie die umgangssprachliche Bedeutung "in der Nähe von" hat. Man sagt z.B. dass der Mond in der Nähe der Erde ist, aber andererseits ist ein Astronaut auf dem Mond nicht in der Nähe von seiner Familie auf der Erde.

Aufgabe 19. Die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ wird durch das Symbol $\mid$ beschrieben und ist wie folgt definiert:

$$x \mid y \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge kx = y).$$

Ist die Teilbarkeitsrelation reflexiv, symmetrisch, transitiv? Definieren Sie den Begriff Primzahl durch eine prädikatenlogische Formel unter Verwendung der Teilbarkeitsrelation.

Aufgabe 20. In relationalen Datenbanken wird oft mit Tabellen gearbeitet, z.B.

Typ	Kennzeichen	Farbe	Baujahr
Ford	HN-DA-8190	rot	1995
VW	S-KR-7618	blau	2001
Fiat	MOS-RT-1783	grün	2003

Dass eine solche Tabelle tatsächlich eine Relation ist, erkennt man wenn man die beteiligten Mengen identifiziert:

$$\begin{aligned}\text{Typ} &= \{\text{Ford}, \text{VW}, \text{Fiat}, \ldots\}\\ \text{Kennzeichen} &= \{\text{HN-DA-8190}, \text{S-KR-7618}, \text{MOS-RT-1783}, \ldots\}\\ \text{Farbe} &= \{\text{rot}, \text{blau}, \text{grün}, \ldots\}\\ \text{Baujahr} &= \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Die oben als Tabelle dargestellte Relation ist dann die Menge der Quadrupel

$$\begin{aligned}R = \Big\{ &(\text{Ford}, \text{HN-DA-8190}, \text{rot}, 1995),\\ &(\text{VW}, \text{S-KR-7618}, \text{blau}, 2001),\\ &(\text{Fiat}, \text{MOS-RT-1783}, \text{grün}, 2003) \Big\}\end{aligned}$$

Somit gilt

$$R \subseteq \text{Typ} \times \text{Kennzeichen} \times \text{Farbe} \times \text{Baujahr}.$$

Es gibt natürlich mehrere Autos des selben Herstellers, mehrere mit der selben Farbe und auch mehrere mit dem selben Baujahr. Andererseits gibt es aber zu gegebenem Kennzeichen höchstens ein Auto mit diesem Kennzeichen. Das Attribut Kennzeichen wird daher auch Schlüssel der Tabelle genannt. Formulieren Sie in der Sprache der Logik, dass das Attribut Kennzeichen Schlüssel der Relation R ist.