Prädikatenlogik

Aufgabe 1. Formulieren Sie folgenden Sachverhalt in der Sprache der Logik: Für alle Mengen A, B, C gilt: Wenn $A \subseteq B$ und $B \subseteq C$ dann ist auch $A \subseteq C$.

Lösung von Aufgabe 1.

$$\forall A\ \forall B\ \forall C\ (A \subseteq B \land B \subseteq C) \to A \subseteq C.$$

Aufgabe 2. Die Aussage "zu jedem $a \in A$ existiert höchstens ein $b \in B$ so dass aRb" lässt sich auf unterschiedliche Weisen durch logische Formeln ausdrücken, z.B.

$$\begin{gathered}
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ (aRb_1 \land aRb_2) \to b_1 = b_2 \\
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ b_1 \neq b_2 \to (\neg aRb_1 \lor \neg aRb_2) \\
\neg\exists a \in A\ \exists b_1, b_2 \in B\ (b_1 \neq b_2 \land aRb_1 \land aRb_2).
\end{gathered}$$

Zeigen Sie durch Anwendung der Umformungsregeln für prädikatenlogische Formeln, dass die zweite und dritte Formel äquivalent zur ersten sind. Übersetzen Sie die dritte Formel zurück in natürliche Sprache.

Lösung von Aufgabe 2. Erste Formel in zweite umformen:

$$\begin{gathered}
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ (aRb_1 \land aRb_2) \to b_1 = b_2 \\
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ b_1 \neq b_2 \to \neg(aRb_1 \land aRb_2) \\
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B; b_1 \neq b_2 \to (\neg aRb_1 \lor \neg aRb_2).
\end{gathered}$$

Erste Formel in dritte umformen:

$$\begin{gathered}
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ (aRb_1 \land aRb_2) \to b_1 = b_2 \\
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ \neg(aRb_1 \land aRb_2) \lor b_1 = b_2 \\
\forall a \in A\ \forall b_1, b_2 \in B\ \neg((aRb_1 \land aRb_2) \land b_1 \neq b_2) \\
\forall a \in A\ \neg\exists b_1, b_2 \in B\ (aRb_1 \land aRb_2 \land b_1 \neq b_2) \\
\neg\exists a \in A\ \exists b_1, b_2 \in B\ (aRb_1 \land aRb_2 \land b_1 \neq b_2).
\end{gathered}$$

Übersetzen in natürliche Sprache: Kein Element von A steht mit zwei unterschiedlichen Elementen von B in Relation.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie zu jeder Stelle, an der ein Variablensymbol in den folgenden Formeln steht, ob es dort frei oder gebunden ist. Variablensymbole werden mit x, y bezeichnet.

- $\forall x\ P(x) \to P(y)$
- $\forall x\ P(x) \to Q(x, y)$
- $\forall x\ (P(x) \to Q(x, y))$

- $Q(x,y) \to \exists y\ P(x)$

Lösung von Aufgabe 3.

- $\forall x\ P(x) \to P(y)$: x ist gebunden, y frei.
- $\forall x\ P(x) \to Q(x,y)$: In $P(x)$ ist x gebunden, in $Q(x,y)$ sind x und y frei.
- $\forall x\ (P(x) \to Q(x,y))$: In $P(x)$ ist x gebunden, in $Q(x,y)$ ist x gebunden und y frei.
- $Q(x,y) \to \exists y\ P(x)$: Alle Variablensymbole sind frei.

Aufgabe 4. Seien A und B Aussagen. Die Aussage "wenn A dann B" ist wahr wenn einer der folgenden Fälle eintritt:

- A ist falsch.
- A ist wahr und B ist wahr.

Sie ist falsch falls

- A wahr ist und B falsch ist.

Prüfen Sie welche der folgenden Aussagen wahr sind:

- Für alle x gilt wenn $x \in \emptyset$ dann ist $x \in \mathbb{N}$. Hinweis: Diese Aussage drückt nichts anderes aus als $\emptyset \subseteq \mathbb{N}$.
- Für alle x gilt wenn $x \in \mathbb{N}$ dann ist $x \in \emptyset$.
- Zu jedem $x \in \emptyset$ existiert ein $y \in \emptyset$ so dass $(x,y) \in \emptyset$. Hinweis: Dies Aussage lässt sich auch so ausdrücken: Für alle x gilt: Wenn $x \in \emptyset$ dann gibt es ein $y \in \emptyset$ so dass $(x,y) \in \emptyset$.
- Für alle $x \in \mathbb{N}$ existiert ein $y \in \mathbb{N}$ so dass $(x,y) \in \emptyset$.
- Für alle $x \in \emptyset$ existiert ein $y \in \mathbb{N}$ so dass $(x,y) \in \emptyset$.

Lösung von Aufgabe 4.

- Für alle x gilt wenn $x \in \emptyset$ dann ist $x \in \mathbb{N}$ ist wahr, da die Aussage $x \in \emptyset$ immer falsch ist.
- Für alle x gilt wenn $x \in \mathbb{N}$ dann ist $x \in \emptyset$ ist falsch, da z.B. für $x = 2$ die Aussage $x \in \mathbb{N}$ wahr ist und $x \in \emptyset$ falsch ist.
- Zu jedem $x \in \emptyset$ existiert ein $y \in \emptyset$ so dass $(x,y) \in \emptyset$ iset wahr. Die Aussage $x \in \emptyset$ ist immer falsch, daher ist die Gesamtaussage wahr.
- Für alle $x \in \mathbb{N}$ existiert ein $y \in \mathbb{N}$ so dass $(x,y) \in \emptyset$ ist falsch. Z.B. für $x = 2$ existiert kein $y \in \mathbb{N}$ so dass $(x,y) \in \emptyset$.
- Für alle $x \in \emptyset$ existiert ein $y \in \mathbb{N}$ so dass $(x,y) \in \emptyset$ ist wahr, da $x \in \emptyset$ immer falsch ist.

Aufgabe 5. Seien F, G, H Aussagen. Zeigen Sie unter Verwendung von Wahrheitstabellen dass folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} F \to G &= \neg F \vee G \\ F \to G &= \neg G \to \neg F \\ F \wedge (G \vee H) &= (F \wedge G) \vee (F \wedge H) \\ F \vee (G \wedge H) &= (F \vee G) \wedge (F \vee H) \end{aligned}$$

Hinweis: $\neg$ bindet stärker als $\wedge$, $\vee$ und $\to$, d.h. $\neg F \vee G$ bedeutet $(\neg F) \vee G$.

Lösung von Aufgabe 5.

F	G	$F \to G$	$\neg F \vee G$	$\neg G \to \neg F$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

F	G	H	$F \wedge (G \vee H)$	$(F \wedge G) \vee (F \wedge H)$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	f	f
f	w	f	f	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

F	G	H	$F \vee (G \wedge H)$	$(F \vee G) \wedge (F \vee H)$
w	w	w	w	w
w	w	f	w	w
w	f	w	w	w
w	f	f	w	w
f	w	w	w	w
f	w	f	f	f
f	f	w	f	f
f	f	f	f	f

Aufgabe 6. Sei

$$M = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Prüfen Sie welche der folgenden Aussagen wahr sind.

$$\begin{gathered}
\forall x\ x \in M \to x < 5 \\
\forall x\ x \in M \to x < 4 \\
\neg\forall x\ x \in M \to x < 4 \\
\exists x\ \neg(x \in M \to x < 4) \\
\forall x\ \big(x \in M \to \exists y(y \in M \wedge x + y \in M)\big)
\end{gathered}$$

Lösung von Aufgabe 6.

- $\forall x\ x \in M \to x < 5$ ist wahr. Jedes Objekt, das in M ist, ist kleiner als 5.
- $\forall x\ x \in M \to x < 4$ ist falsch. Die Zahl 4 ist in M aber $4 < 4$ ist falsch.
- $\neg\forall x\ x \in M \to x < 4$ ist wahr, da die vorige Aussage falsch ist.
- $\exists x\ \neg(x \in M \to x < 4)$ ist wahr. Für $x = 4$ ist die Aussage $x \in M \to x < 4$ falsch und somit $\neg(x \in M \to x < 4)$ wahr.
- $\forall x\ \big(x \in M \to \exists y(y \in M \wedge x + y \in M)\big)$ ist falsch. Für $x = 4$ gibt's kein $y \in M$ so dass $x + y \in M$.

Aufgabe 7. Finden Sie drei verschiedene Mengen A, für die die folgende Formel wahr ist:

$$A \subseteq \mathbb{N} \wedge \big(\forall x\ \forall y\ (x \in A \wedge y \in A) \to x + y \in A\big).$$

Ist die Formel für $A = \emptyset$ wahr?

Lösung von Aufgabe 7. Die Formel sagt aus, dass A eine Menge von natürlichen Zahlen ist und die Summe zweier Elemente aus A wieder in A sein muss.

- Beispiele für Mengen A, die die Formel erfüllen sind

$$\begin{aligned}
A &= \mathbb{N} \\
A &= \{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\} \\
A &= \{3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}
\end{aligned}$$

- Die Formel ist für $A = \emptyset$ wahr, da

$$x \in \emptyset \wedge y \in \emptyset$$

falsch ist, egal was x und y ist. Also ist

$$(x \in \emptyset \wedge y \in \emptyset) \to x + y \in \emptyset$$

wahr für alle x und y, d.h.

$$\forall x \, \forall y \, (x \in \emptyset \land y \in \emptyset) \to x + y \in \emptyset$$

ist wahr. Da außerdem

$$\emptyset \subseteq \mathbb{N}$$

wahr ist, ist

$$\emptyset \subseteq \mathbb{N} \land \forall x \, \forall y \, (x \in \emptyset \land y \in \emptyset) \to x + y \in \emptyset$$

wahr.

Aufgabe 8. Die Formel

$$A \subseteq B \land A \neq B$$

sagt aus dass A echte Teilmenge von B ist (geschrieben $A \subset B$). Auch die Formel

$$A \subseteq B \land \exists x \, (x \in B \land x \notin A)$$

ist genau dann wahr wenn A echte Teilmenge von B ist. Benutzen Sie die Rechengesetze der Logik um die erste Formel schrittweise äquivalent in die zweite umzuformen.

Lösung von Aufgabe 8. Die einzelnen Schritte sind wie folgt:

$$\begin{gathered}
A \subseteq B \land A \neq B \\
A \subseteq B \land \neg(A = B) \\
A \subseteq B \land \neg(A \subseteq B \land B \subseteq A) \\
A \subseteq B \land (A \nsubseteq B \lor B \nsubseteq A) \\
(A \subseteq B \land A \nsubseteq B) \lor (A \subseteq B \land B \nsubseteq A) \\
A \subseteq B \land B \nsubseteq A \\
A \subseteq B \land \neg\forall x \, (x \in B \to x \in A) \\
A \subseteq B \land \exists x \, \neg(x \in B \to x \in A) \\
A \subseteq B \land \exists x \, \neg(x \notin B \lor x \in A) \\
A \subseteq B \land \exists x \, (x \in B \land x \notin A)
\end{gathered}$$

Aufgabe 9. Die Differenz zweier Mengen A und B ist definiert durch

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \land x \notin B\}.$$

Finden Sie eine logisch äquivalente Definition für die Mengendifferenz unter Verwendung von $\neg$ und $\to$, d.h. finden Sie eine Formel, die äquivalent ist zu

$$x \in A \land x \notin B$$

und in der nur die logischen Symbole $\neg$ und $\to$ vorkommen. Überzeugen Sie sich anhand eines Bildes, dass Ihre Definition mit der oben genannten tatsächlich übereinstimmt.

Lösung von Aufgabe 9.

$$\begin{aligned} x \in A \wedge x \notin B &= \neg\neg(x \in A \wedge x \notin B) \\ &= \neg(x \notin A \vee x \in B) \\ &= \neg(x \in A \rightarrow x \in B) \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Übersetzen Sie die folgenden Formeln in natürliche Sprache und entscheiden Sie, ob sie wahr oder falsch sind. Das Symbol $\leq_{\mathbb{N}}$ steht für die kleiner-gleich Relation auf natürlichen Zahlen.

$$\forall x\; x \in \mathbb{Z} \rightarrow (\exists y\; y \in \mathbb{Z} \wedge x + y = 5)$$
$$\forall x\; x \in \mathbb{Z} \rightarrow (\exists y\; y \in \mathbb{N} \wedge x + y = 5)$$
$$\exists x\; x \in \mathbb{Z} \wedge (\forall y\; y \in \mathbb{Z} \rightarrow x + y = 5)$$
$$\forall x\; \forall y\; x \leq_{\mathbb{N}} y \rightarrow y \leq_{\mathbb{N}} x$$
$$\forall x\; \forall y\; \forall z\; (x \leq_{\mathbb{N}} y \wedge y \leq_{\mathbb{N}} z) \rightarrow x \leq_{\mathbb{N}} z$$
$$\forall x\; \forall y (x \leq_{\mathbb{N}} y \wedge y \leq_{\mathbb{N}} x) \rightarrow x = y$$

Lösung von Aufgabe 10. Die Formel

$$\forall x\; x \in \mathbb{Z} \rightarrow (\exists y\; y \in \mathbb{Z} \wedge x + y = 5)$$

drückt aus, dass es zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ ein $y \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $x + y = 5$. Dies ist offensichtlich wahr, man wählt zu beliebigem $x \in \mathbb{Z}$ einfach $y = 5 - x$.

Die Formel

$$\forall x\; x \in \mathbb{Z} \rightarrow (\exists y\; y \in \mathbb{N} \wedge x + y = 5)$$

drückt aus, dass es zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ ein $y \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $x + y = 5$. Dies ist falsch, da es z.B. für $x = 6$ kein $y \in \mathbb{N}$ gibt mit $x + y = 5$.

Die Formel

$$\exists x\; x \in \mathbb{Z} \wedge (\forall y\; y \in \mathbb{Z} \rightarrow x + y = 5)$$

drückt aus, dass es ein $x \in \mathbb{Z}$ gibt so dass für alle $y \in \mathbb{Z}$ gilt $x + y = 5$. Dies ist ebenfalls falsch.

Die Formel

$$\forall x\; \forall y\; x \leq_{\mathbb{N}} y \rightarrow y \leq_{\mathbb{N}} x$$

drückt aus, dass für alle Objekte x, y gilt: Wenn $x \leq_{\mathbb{N}} y$ dann auch $y \leq_{\mathbb{N}} x$. Dies ist falsch, z.B. $3 \leq_{\mathbb{N}} 4$ aber $4 \not\leq_{\mathbb{N}} 3$.

Die Formel

$$\forall x\; \forall y\; \forall z\; (x \leq_{\mathbb{N}} y \wedge y \leq_{\mathbb{N}} z) \rightarrow x \leq_{\mathbb{N}} z$$

drückt aus, dass wenn $x \leq_{\mathbb{N}} y$ und $y \leq_{\mathbb{N}} z$, auch $x \leq_{\mathbb{N}} z$ ist. Dies ist wahr.

Die Formel

$$\forall x\; \forall y (x \leq_{\mathbb{N}} y \wedge y \leq_{\mathbb{N}} x) \rightarrow x = y$$

drückt aus, dass wenn $x \leq_{\mathbb{N}} y$ und $y \leq_{\mathbb{N}} x$ ist, notwendigerweise x und y gleich sein müssen. Dies ist wahr.

Aufgabe 11. Die Aussage

"es gibt keine größte reelle Zahl"

lässt sich als prädikatenlogische Formel wie folgt schreiben:

$$\neg\exists x\ \big(x \in \mathbb{R} \wedge (\forall y\ y \in \mathbb{R} \to y \leq_{\mathbb{R}} x)\big).$$

Wenden Sie die Umformungsregeln für prädikatenlogische Formeln an, so dass am Schluss eine Formel für die äquivalente Aussage

"zu jeder reellen Zahl gibt es eine noch größere reelle Zahl"

rauskommt. Führen Sie die selbe Umformung nochmal durch, diesmal aber unter Verwendung von relativierten Quantoren.

Lösung von Aufgabe 11.

$$\begin{gathered}
\neg\exists x\ \big(x \in \mathbb{R} \wedge (\forall y\ y \in \mathbb{R} \to y \leq_{\mathbb{R}} x)\big)\\
\forall x\ \neg\big(x \in \mathbb{R} \wedge (\forall y\ y \in \mathbb{R} \to y \leq_{\mathbb{R}} x)\big)\\
\forall x\ x \notin \mathbb{R} \vee \neg(\forall y\ y \in \mathbb{R} \to y \leq_{\mathbb{R}} x)\\
\forall x\ x \in \mathbb{R} \to \neg(\forall y\ y \in \mathbb{R} \to y \leq_{\mathbb{R}} x)\\
\forall x\ x \in \mathbb{R} \to \exists y\ \neg(y \in \mathbb{R} \to y \leq_{\mathbb{R}} x)\\
\forall x\ x \in \mathbb{R} \to \exists y\ \neg(y \notin \mathbb{R} \vee y \leq_{\mathbb{R}} x)\\
\forall x\ x \in \mathbb{R} \to \exists y\ y \in \mathbb{R} \wedge y \not\leq_{\mathbb{R}} x)\\
\forall x\ x \in \mathbb{R} \to \exists y\ y \in \mathbb{R} \wedge y >_{\mathbb{R}} x)
\end{gathered}$$

Verwendung von relativierten Quantoren:

$$\begin{gathered}
\neg\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y \leq_{\mathbb{R}} x\\
\forall x \in \mathbb{R}\ \neg\forall y \in \mathbb{R}\ y \leq_{\mathbb{R}} x\\
\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \neg y \leq_{\mathbb{R}} x\\
\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y >_{\mathbb{R}} x
\end{gathered}$$

Aufgabe 12. Sei M die Menge aller Menschen. Die Relation

$$\text{Mutter} \subseteq M \times M$$

ist definiert durch

$$\text{Mutter} = \{(x, y) \mid\ x \text{ und } y \text{ sind Menschen und } x \text{ ist Mutter von } y\ \}.$$

Statt

$$(x, y) \in \text{Mutter}$$

schreibt man einfach

$$\text{Mutter}(x, y).$$

Drücken Sie folgende Aussagen als prädikatenlogische Formeln aus:

- Jeder Mensch hat eine Mutter.
- Eva hat keine Mutter.
- Eva hat kein Kind.
- Wenn x und y Mütter von z sind, dann ist $x = y$.
- Jeder Mensch hat genau eine Mutter. (Problematisch ist hierbei das "*genau* eine". Man kann das auch so formulieren: Jeder Mensch hat eine Mutter und es ist nicht möglich, dass $x \neq y$ und sowohl x als auch y Mutter von z sind.)

Analog zur Mutter Relation ist auch die Vater Relation definiert, d.h.

$$\text{Vater}(x, y)$$

genau dann wen x Vater von y ist. Finden Sie eine Prädikatenlogische Formel mit freien Variablen x und y, die unter Verwendung der Mutter- und Vater Relation ausdrückt, dass x Großmutter von y ist.

Lösung von Aufgabe 12.

- Jeder Mensch hat eine Mutter.

$$\forall y \ \exists x \ \text{Mutter}(x, y)$$

- Eva hat keine Mutter.

$$\neg \exists x \ \text{Mutter}(x, \text{Eva})$$

- Eva hat kein Kind.

$$\neg \exists y \ \text{Mutter}(\text{Eva}, y)$$

- Wenn x und y Mütter von z sind, dann ist $x = y$.

$$\big(\text{Mutter}(x, z) \wedge \text{Mutter}(y, z)\big) \rightarrow x = y$$

- Jeder Mensch hat genau eine Mutter.

$$\Big(\forall y \ \exists x \ \text{Mutter}(x, y)\Big) \wedge \Big(\forall x \ \forall y \ \forall z \ \neg (x \neq y \wedge \big(\text{Mutter}(x, z) \wedge \text{Mutter}(y, z)\big)\Big)$$

Folgende Formel drückt aus, dass x Großmutter von y ist:

$$\exists z \ \big(\text{Mutter}(z, y) \vee \text{Vater}(z, y)\big) \wedge \text{Mutter}(x, z)$$

Aufgabe 13. Prolog ist eine Programmiersprache, die in den 80er Jahren sehr populär war für Anwendungen der künstlichen Intelligenz. Insbesondere im 5th Generation Project, mit dem die Japaner "wirklich intelligente" Systeme bauen wollten, spielte Prolog eine zentrale Rolle. Zur Zeit wird intensiv an Verbesserungen von Prolog im Zusammenhang mit dem Semantic Web geforscht.

Setzen Sie sich an einen Rechner in unseren Pools und rufen Sie den dort installierten Prolog Interpreter auf über

	Start
→	Programme
→	Programmiersprachen
→	SWI-Prolog-Editor

Erzeugen Sie dort ein neue Datei mit

	File
→	New

Schreiben Sie in das obere (Editor) Fenster folgendes Prolog Programm: (Achten Sie dabei auf Groß- und Kleinschreibung und vergessen Sie die Punkte nicht!)

```
mutter(andrea,hans).
mutter(eva,andrea).
mutter(ursula,thomas).
vater(thomas,hans).
elternteil(X,Y) :- mutter(X,Y).
elternteil(X,Y) :- vater(X,Y).
grossmutter(X,Y) :- mutter(X,Z),elternteil(Z,Y).
```

Speichern Sie das Programm mit

	File
→	Save As

ab. Laden Sie es dann in den Prolog Interpreter mit

	Start
→	Consult

Geben Sie danach im unteren (Interpreter) Fenster nach dem Prompt `?-` folgende Fragen ein:

```
mutter(eva,andrea).
mutter(eva,hans).
grossmutter(eva,hans).
grossmutter(X,hans).
grossmutter(ursula,Y).
```

Sowohl eva als auch ursula sind Großmütter von hans. Alle Großmütter von hans bekommt man, wenn man

```
grossmutter(X,hans).
```

fragt und nach der Antwort des Systems "n" (für next) eingibt.

Versuchen Sie zu erraten, was Ihr Programm bedeutet, indem Sie jede Programmzeile in prädikatenlogische Formeln oder Mengenausdrücke übersetzen. Welche Programmsymbole entsprechen den logischen Symbolen $\rightarrow$ und $\wedge$? Wie ist $\vee$ codiert und wie die Quantoren?

Schreiben Sie ein Prolog Programm, in dem sinngemäß steht

- Alle Menschen sind sterblich.
- Sokrates ist ein Mensch.

Laden Sie dieses Programm in den Prolog Interpreter und fragen Sie dann, ob Sokrates sterblich ist.

Übrigens: Der Prolog Interpreter ist kostenlos, Sie finden Windows und Linux Versionen unter

```
http://www.swi-prolog.org
```

Lösung von Aufgabe 13. Das Prolog Programm liest sich mathematisch wie folgt: mutter, vater, elternteil und grossmutter sind Relationen auf der Menge der Menschen, also z.B.

$$\begin{aligned} \text{mutter} &= \{(\text{andrea}, \text{hans}), (\text{eva}, \text{andrea}), (\text{ursula}, \text{thomas})\} \\ \text{vater} &= \{(\text{thomas}, \text{hans})\} \end{aligned}$$

Die letzten 3 Zeilen des Programms entsprechen Formeln, durch die die Relationen elternteil und grossmutter definiert sind:

$$\forall x\, \forall y\ \text{mutter}(x, y) \vee \text{vater}(x, y) \rightarrow \text{elternteil}(x, y)$$

$$\forall x\, \forall y\ \big(\exists z(\text{mutter}(x, z) \wedge \text{elternteil}(z, y))\big) \rightarrow \text{grossmutter}(x, y).$$

Das Prolog Programm zum Sokrates Problem sieht wie folgt aus

```
mensch(sokrates).
sterblich(X) :- mensch(X).
```

Die Frage ob Sokrates sterblich ist, formuliert man dann durch

```
sterblich(sokrates).
```

Aufgabe 14. Formen Sie die prädikatenlogische Formel

$$\neg\forall x\ (x \in \mathbb{R} \to (x > 3 \to x < 5))$$

schrittweise äquivalent so um, dass kein Allquantor und kein wenn–dann Symbol mehr darin vorkommt. Ist die Formel wahr?

Lösung von Aufgabe 14.

$$\begin{gathered}
\neg\forall x\ (x \in \mathbb{R} \to (x > 3 \to x < 5)) \\
\exists x\ \neg(x \in \mathbb{R} \to (x > 3 \to x < 5)) \\
\exists x\ \neg(x \notin \mathbb{R} \vee (x > 3 \to x < 5)) \\
\exists x\ (x \in \mathbb{R} \wedge \neg(x > 3 \to x < 5)) \\
\exists x\ (x \in \mathbb{R} \wedge \neg(x \leq 3 \vee x < 5)) \\
\exists x\ (x \in \mathbb{R} \wedge (x > 3 \wedge x \geq 5))
\end{gathered}$$

Die Formel ist wahr.

Aufgabe 15. Die Aussage, dass jede Menge eine Teilmenge hat, lässt sich durch folgende Formel ausdrücken:

$$\forall A\ \exists B\ B \subseteq A.$$

Sagt die Formel das Selbe aus wenn man die Reihenfolge der Quantoren ändert, d.h.

$$\exists B\ \forall A\ B \subseteq A?$$

Ist die Formel wahr?

Lösung von Aufgabe 15. Die Formel

$$\exists B\ \forall A\ B \subseteq A$$

besagt, dass es eine Menge gibt, die Teilmenge von jeder anderen Menge ist. Da die leere Menge Teilmenge von jeder anderen Menge ist, ist die Aussage wahr. Sie sagt jedoch etwas anderes aus als die ursprüngliche Aussage, dass jede Menge eine Teilmenge hat.

Aufgabe 16. Übersetzen Sie folgende Formeln in natürliche Sprache und entscheiden Sie, welche wahr ist:

$$\begin{gathered}
\forall x\ x \in \mathbb{N} \to (\exists y\ y \in \mathbb{N} \wedge y = x + 1) \\
\forall x\ x \in \mathbb{N} \to (\exists y\ y \in \mathbb{N} \wedge y = x - 1) \\
\exists y\ y \in \mathbb{N} \wedge (\forall x\ x \in \mathbb{N} \to y = x + 1)
\end{gathered}$$

Lösung von Aufgabe 16.

- Die Formel
$$\forall x \; x \in \mathbb{N} \to (\exists y \; y \in \mathbb{N} \wedge y = x + 1)$$
besagt dass es zu jeder natürlichen Zahl eine Nachfolgerzahl gibt, was korrekt ist.
- Die Formel
$$\forall x \; x \in \mathbb{N} \to (\exists y \; y \in \mathbb{N} \wedge y = x - 1)$$
besagt dass es zu jeder natürlichen Zahl eine Vorgängerzahl gibt. Dies ist nicht korrekt, da es für $x = 1$ kein $y \in \mathbb{N}$ gibt so dass $y = x - 1$.
- Die Formel
$$\exists y \; y \in \mathbb{N} \wedge (\forall x \; x \in \mathbb{N} \to y = x + 1)$$
besagt, dass es eine natürliche Zahl gibt, so dass alle natürlichen Zahlen plus eins gleich dieser Zahl sind. Dies ist falsch.

Aufgabe 17. Der Fermat'sche Satz besagt, dass es keine natürlichen Zahlen a, b, c, n gibt mit $n > 2$ so dass
$$a^n + b^n = c^n.$$
Übersetzen Sie diese Aussage in die Sprache der Logik. Formen Sie die entstehende Formel so um, dass sie keinen Existenzquantor und kein $\wedge$ Symbol enthält.

Lösung von Aufgabe 17.
$$\neg\exists a, b, c, n \in \mathbb{N} \; n > 2 \wedge a^n + b^n = c^n$$
$$\forall a, b, c, n \in \mathbb{N} \; \neg(n > 2 \wedge a^n + b^n = c^n)$$
$$\forall a, b, c, n \in \mathbb{N} \; n \leq 2 \vee a^n + b^n \neq c^n$$

Aufgabe 18. Seien $f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Man sagt f dominiert g wenn es ein $\hat{x} \in \mathbb{R}$ gibt so dass die Funktionswerte von f größer sind als die Funktionswerte von g für alle x, die größer als $\hat{x}$ sind. Formulieren Sie diese Definition in der Sprache der Prädikatenlogik.

Lösung von Aufgabe 18.
$$\exists \hat{x} \in \mathbb{R} \; \forall x \in \mathbb{R} \; x > \hat{x} \to f(x) > g(x)$$

Aufgabe 19. Gegeben ist die Formel
$$\neg\exists f \in \mathbb{N} \to \{0, 1\} \; \text{injektiv}(f).$$

- Übersetzen Sie diese Formel in natürliche Sprache. Ist die Aussage wahr?

- Setzen Sie die Definition von "injektiv" ein und formen Sie die Formel so lange um, bis

  $$\forall f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}\ (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2))$$

  herauskommt. Schreiben Sie zu jedem Schritt dazu welche Regel Sie angewendet haben.

Lösung von Aufgabe 19. Es gibt keine injektive Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\{0,1\}$. Die Aussage ist wahr.

- Definition von injektiv:

  $$\neg\exists f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}\ \forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}\ x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Vertauschen von $\neg$ und $\exists$:

  $$\forall f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}\ \neg\forall x_1, x_2 \in \mathbb{N}\ x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2).$$

- Vertauschen von $\neg$ und $\forall$:

  $$\forall f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}\ \neg(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)).$$

- Ersetzen von $\to$:

  $$\forall f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}\ \neg(x_1 = x_2 \vee f(x_1) \neq f(x_2)).$$

- De Morgan'sche Regel:

  $$\forall f \in \mathbb{N} \to \{0,1\}\ \exists x_1, x_2 \in \mathbb{N}\ (x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)).$$

Aufgabe 20. Sei `Java` die Menge aller Java Programme und

$$H = \{(a,b) \mid a, b \in \texttt{Java} \text{ und } a \text{ hält mit Input } b\ \}$$

eine Relation auf `Java`. Formulieren Sie unter Verwendung von H in der Sprache der Logik die Aussage, dass es kein Java Programm x gibt, das mit genau den Java Programmen y als Input terminiert, die nicht mit sich selbst als Input terminieren.

Lösung von Aufgabe 20.

$$\neg\exists x \in \texttt{Java}\ \forall y \in \texttt{Java}\ H(x,y) \leftrightarrow \neg H(y,y).$$

Aufgabe 21. Durch

```
float[] x;
int f(double x, char c);
```

wird in Java eine Variable x bzw. eine Funktion f deklariert. Übersetzen Sie diese Deklarationen in mengentheoretische Ausdrücke.

Lösung von Aufgabe 21.

$$x \in \texttt{float}^*$$
$$f \in \texttt{double} \times \texttt{char} \to \texttt{int}.$$

Aufgabe 22. Die Teilbarkeitsrelation auf $\mathbb{N}$ wird durch das Symbol $\mid$ beschrieben und ist wie folgt definiert:

$$x \mid y \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge \exists k\ (k \in \mathbb{N} \wedge kx = y).$$

Ist die Teilbarkeitsrelation reflexiv, symmetrisch, transitiv? Definieren Sie den Begriff Primzahl durch eine prädikatenlogische Formel unter Verwendung der Teilbarkeitsrelation.

Lösung von Aufgabe 22. Die Teilbarkeitsrelation ist reflexiv und transitiv aber nicht symmetrisch.

$$\text{Primzahl}(x) \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \wedge x \neq 1 \wedge \forall z\ (z \mid x \to (z = 1 \vee z = x)).$$

Aufgabe 23. Übersetzen Sie folgende Aussagen in die Sprache der Prädikatenlogik.

(1) Steine sind nicht sterblich.
(2) Snoopy ist kein Stein.
(3) Snoopy ist sterblich.

Hinweis: Verwenden Sie in den Formeln die Prädikate (oder Mengen) "Stein" und "Sterblich". Lässt sich Aussage (3) aus (1) und (2) beweisen?

Lösung von Aufgabe 23.

(1) $\forall x\ \text{Stein}(x) \to \neg\text{Sterblich}(x)$
(2) $\neg\text{Stein}(\text{Snoopy})$
(3) $\text{Sterblich}(\text{Snoopy})$

Aussage (3) folgt nicht logisch aus (1) und (2) und lässt sich daher nicht beweisen.

Aufgabe 24. Formulieren Sie in der Sprache der Prädikatenlogik:

Zu jedem a existiert höchstens ein b so dass aRb.

Definieren Sie eine Relation R, auf die diese Aussage zutrifft und ein andere Relation R, auf die diese Aussage nicht zutrifft.

Lösung von Aufgabe 24.

$$\forall a, b_1, b_2\ aRb_1 \wedge aRb_2 \to b_1 = b_2.$$

Aussage trifft zu auf

$$R = \{(1,1)\}.$$

Aussage trifft nicht zu auf

$$R = \{(1,1), (1,2)\}.$$

Aufgabe 25. Formulieren Sie in der Sprache der Prädikatenlogik die Aussage

everybody loves somebody sometime

Hinweis: Die Formel enthält drei Quantoren und ein dreistelliges Relationssymbol — soll also niemand sagen, dass die Texte von Dean Martin nicht hoch anspruchsvoll wären! Stellen Sie die Reihenfolge der Quantoren um und übersetzen Sie die entstehende Formel zurück in natürliche Sprache. Sagen die beiden Formel das Gleiche aus?

Lösung von Aufgabe 25. Die Formel ist

$$\forall x\ \exists y\ \exists t\ \text{loves}(x, y, t).$$

Umstellen der Quantoren ergibt z.B.

$$\exists y\ \exists t\ \forall x\ \text{loves}(x, y, t).$$

Die Formel sagt dann aus, dass es eine Person y und einen Zeitpunkt t gibt so dass jeder die Person y zur Zeit t mag. Das kann eigentlich nur Frau Merkel zum Zeitpunkt der letzten Bundestagswahl gewesen sein.

Aufgabe 26. Gegeben sei folgender Symbolvorrat:

- Konstantensymbole c, d.
- Variablensymbole x, y.
- Funktionssymbole f (einstellig), g (zweistellig).
- Relationssymbole P (einstellig), Q (zweistellig).

Konstruieren Sie mit diesen Symbolen drei Terme, drei atomare Formeln und drei Formeln, die nicht atomar sind.

Lösung von Aufgabe 26. Terme:

$$c, \quad f(x), \quad g(f(c), g(x, y))$$

Atomare Formeln:

$$P(c), \quad P(f(f(x))), \quad Q(f(x), g(c, c))$$

Formeln:

$$(P(x) \vee P(c)), \quad \forall x\ (Q(x, x) \to P(y)), \quad (P(x) \to \forall y\ Q(y, y)).$$

Aufgabe 27. Auch die Beatles haben sich mit ihrem Lied

> *all you need is love*

als Freunde der Logik geoutet. Um ihre Erkenntnis maschinell verarbeiten zu können, sollte man sich klar machen, dass "love" eine Konstante ist. Bei "need" handelt es sich um eine zweistellige Relation. So bedeutet z.B. need(x, y) in natürlicher Sprache x braucht y. Mit "you" meinten die Beatles alle. Übersetzen Sie den Titel in die Sprache der Prädikatenlogik. Hinweis: Formulieren Sie den Satz zuerst um in

> *everybody needs love and if somebody needs anything, then it is love.*

Formen Sie die entstehende Formel unter Verwendung der Regeln der Prädikatenlogik so um, dass sich folgende Aussage ergbibt:

> *everybody needs love and it is not true that there is someone who needs something which is not love.*

Und wenn Ihnen dazu noch eine nette Melodie einfällt wird das bestimmt ein Hit.

Lösung von Aufgabe 27. Die direkte Übersetzung ist

$$\forall z \text{ needs}(z, \text{love}) \wedge \forall x \ (\exists y \text{ needs}(y, x) \rightarrow x = \text{love}).$$

Umformen ergibt

$$\begin{aligned}
&\forall z \text{ needs}(z, \text{love}) \wedge \forall x \ (\neg\exists y \text{ needs}(y, x) \vee x = \text{love}). \\
&\forall z \text{ needs}(z, \text{love}) \wedge \forall x \ \neg(\exists y \text{ needs}(y, x) \wedge x \neq \text{love}). \\
&\forall z \text{ needs}(z, \text{love}) \wedge \neg\exists x \ \exists y \ (\text{needs}(y, x) \wedge x \neq \text{love}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 28. Was sagen folgende beiden Formeln aus und welche davon ist wahr?

$$\begin{aligned}
&(\forall x \ x \in \mathbb{N}) \rightarrow -5 \in \mathbb{N} \\
&\forall x \ (x \in \mathbb{N} \rightarrow -5 \in \mathbb{N}).
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 28. Die erste Formel besagt: Wenn jedes Objekt eine natürliche Zahl ist, dann ist auch -5 eine natürliche Zahl. Da der wenn-Teil falsch ist, ist die ganze Formel wahr.

Die zweite Formel besagt: Für jedes Objekt x gilt, dass wenn x eine natürliche Zahl ist, auch -5 eine natürliche Zahl ist. Die Aussage ist falsch, da z.B. für $x = 1$ die Aussage $x \in \mathbb{N} \rightarrow -5 \in \mathbb{N}$ falsch ist.

Aufgabe 29. Überlegen Sie sich zwei Formeln $F(x)$ und $G(x)$ mit freier Variablen x so dass die Formeln

$$\forall x\ (F(x) \lor G(x))$$
$$\forall x\ F(x) \lor \forall x\ G(x)$$

unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

Gibt es auch Formeln $F(x)$ und $G(x)$ mit freier Variablen x so dass

$$\forall x\ (F(x) \land G(x))$$
$$\forall x\ F(x) \land \forall x\ G(x)$$

unterschiedliche Wahrheitswerte haben?

Lösung von Aufgabe 29. Sei

$$\begin{aligned} F(x) &= x \in \mathbb{N} \\ G(x) &= x \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann ist die Formel

$$(F(x) \lor G(x))$$

wahr, ganz egal was man für x einsetzt. Daher ist auch

$$\forall x\ (F(x) \lor G(x))$$

wahr. Andererseits sind beide Formeln

$$\forall x\ F(x), \quad \forall x\ G(x)$$

falsch. Damit ist auch

$$\forall x\ F(x) \lor \forall x\ G(x)$$

falsch.

Die Formeln

$$\forall x\ (F(x) \land G(x))$$
$$\forall x\ F(x) \land \forall x\ G(x)$$

sind äquivalent, d.h. haben immer den selben Wahrheitswert. Einen Allquantor darf man daher in eine und-Verknüpfung reinziehen, im allgemeinen aber nicht in eine oder-Verknüpfung.

Aufgabe 30. Überlegen Sie sich zwei Formeln $F(x)$ und $G(x)$ mit freier Variablen x so dass die Formeln

$$\exists x\ (F(x) \land G(x))$$
$$\exists x\ F(x) \land \exists x\ G(x)$$

unterschiedliche Wahrheitswerte haben.

Gibt es auch Formeln $F(x)$ und $G(x)$ mit freier Variablen x so dass

$$\exists x\ (F(x) \vee G(x))$$
$$\exists x\ F(x) \vee \exists x\ G(x)$$

unterschiedliche Wahrheitswerte haben?

Lösung von Aufgabe 30. Sei

$$\begin{aligned} F(x) &= x \in \mathbb{N} \\ G(x) &= x \notin \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dann ist die Formel

$$(F(x) \wedge G(x))$$

falsch, ganz egal was man für x einsetzt. Daher ist auch

$$\exists x\ (F(x) \wedge G(x))$$

falsch. Andererseits sind beide Formeln

$$\exists x\ F(x), \quad \exists x\ G(x)$$

wahr. Damit ist auch

$$\exists x\ F(x) \wedge \exists x\ G(x)$$

wahr.

Die Formeln

$$\exists x\ (F(x) \vee G(x))$$
$$\exists x\ F(x) \vee \exists x\ G(x)$$

sind äquivalent, d.h. haben immer den selben Wahrheitswert. Einen Existenzquantor darf man daher in eine oder-Verknüpfung reinziehen, im allgemeinen aber nicht in eine und-Verknüpfung.

Aufgabe 31. Nennen Sie eine Formel, in der das Variablensymbol x sowohl frei als auch gebunden vorkommt. Führen Sie dann eine gebundene Umbenennung durch, so dass kein Variablensymbol sowohl frei als auch gebunden auftritt.

Lösung von Aufgabe 31. In folgender Formel kommt x sowohl frei als auch gebunden vor.

$$(\forall x\ x \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{Z}).$$

Gebundene Umbenennung ergibt

$$(\forall z\ z \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{Z}).$$

Hier ist z gebunden und x frei.

Aufgabe 32. Fügen Sie in den folgenden Zeichenketten Klammern ein, so dass syntaktisch korrekte Formeln herauskommen. Wenn es mehrere Möglichkeiten gibt, nennen Sie alle.

$$P(x) \wedge Q(c,x) \vee \forall y\ P(y)$$
$$\forall x\ \exists y\ P(x) \vee Q(x,y)$$
$$\forall x\ P(x) \to \exists y\ P(y)$$

Lösung von Aufgabe 32.

- $P(x) \wedge Q(c,x) \vee \forall y\ P(y)$.

$$\Big(\big(P(x) \wedge Q(c,x)\big) \vee \forall y\ P(y)\Big)$$
$$\Big(P(x) \wedge \big(Q(c,x) \vee \forall y\ P(y)\big)\Big)$$

- $\forall x\ \exists y\ P(x) \vee Q(x,y)$.

$$\forall x\ \exists y\ \big(P(x) \vee Q(x,y)\big)$$
$$\forall x\ \big(\exists y\ P(x) \vee Q(x,y)\big)$$
$$\big(\forall x\ \exists y\ P(x) \vee Q(x,y)\big)$$

- $\forall x\ P(x) \to \exists y\ P(y)$.

$$\big(\forall x\ P(x) \to \exists y\ P(y)\big)$$
$$\forall x\ \big(P(x) \to \exists y\ P(y)\big)$$

Aufgabe 33. Nennen Sie jeweils 3 Elemente der folgenden Mengen.

$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y\ (y \in \mathbb{N} \wedge y < x)\}$$
$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y\ (y \in \mathbb{N} \wedge xy = 42)\}$$
$$\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y\ \exists z\ (y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{N} \wedge x = 3y + 5z)\}$$
$$\{x \mid x \subseteq \mathbb{N} \wedge 3 \in x\}$$
$$\{x \mid x \neq x\}$$
$$\{x \mid x \subseteq x\}$$
$$\{x \mid x \in x\}$$

Lösung von Aufgabe 33.

$$\begin{aligned}
\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y\ (y \in \mathbb{N} \wedge y < x)\} &= \{2,3,4,\ldots\} \\
\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y\ (y \in \mathbb{N} \wedge xy = 42)\} &= \{1,2,3,6,7,14,21,42\} \\
\{x \mid x \in \mathbb{N} \wedge \exists y\ \exists z\ (y \in \mathbb{N} \wedge z \in \mathbb{N} \wedge x = 3y + 5z)\} &= \{8,11,13,14,16,\ldots\} \\
\{x \mid x \subseteq \mathbb{N} \wedge 3 \in x\} &= \big\{\{3\},\{2,3\},\{3,5,11\},\{3,4,5,6,\ldots\}\big\} \\
\{x \mid x \neq x\} &= \emptyset \\
\{x \mid x \subseteq x\} &= M \\
\{x \mid x \in x\} &= \{M, M \setminus \{\emptyset\}, M \setminus \{\mathbb{N}\}, \ldots\},
\end{aligned}$$

wobei M die Menge aller Mengen ist.

Aufgabe 34. Vereinfachen Sie folgende Formel unter Anwendung der Ihnen bekannten Regeln so dass kein $\rightarrow$ Symbol mehr darin vorkommt und alle Negationssymbole unmittelbar vor atomaren Formeln stehen.

$$\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (\neg Q(x,c) \rightarrow \neg P(y)))$$

Lösung von Aufgabe 34.

$$\begin{gathered}
\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (\neg Q(x,c) \rightarrow \neg P(y))) \\
\neg\forall x\ (P(x) \rightarrow \exists y\ (Q(x,c) \vee \neg P(y))) \\
\neg\forall x\ (\neg P(x) \vee \exists y\ (Q(x,c) \vee \neg P(y))) \\
\exists x\ \neg(\neg P(x) \vee \exists y\ (Q(x,c) \vee \neg P(y))) \\
\exists x\ (P(x) \wedge \neg\exists y\ (Q(x,c) \vee \neg P(y))) \\
\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ \neg(Q(x,c) \vee \neg P(y))) \\
\exists x\ (P(x) \wedge \forall y\ (\neg Q(x,c) \wedge P(y)))
\end{gathered}$$

Aufgabe 35. Beim Beweis einer Formel vom Typ $F \rightarrow G$ führt man eine Fallunterscheidung durch.

- Fall 1: Annahme F ist falsch. Dann ist $F \rightarrow G$ wahr, d.h. es ist nichts zu zeigen.
- Fall 2: Annahme F ist wahr. Dann ist $F \rightarrow G$ wahr falls G wahr ist, d.h. es muss bewiesen werden dass G wahr ist.

Kurzum, man nimmt an dass F wahr ist und zeigt damit dass auch G wahr ist.

Überlegen Sie sich ähnliche Schemata um eine Formel vom Typ $F \vee G$ bzw. vom Typ $F \wedge G$ zu beweisen.

Lösung von Aufgabe 35. Beweis von $F \vee G$. Man kann wieder eine Fallunterscheidung machen, wobei ein Fall trivial ist.

- Fall 1: Annahme F ist wahr. Dann ist $F \vee G$ wahr, d.h. es ist nichts zu zeigen.
- Fall 2: Annahme F ist falsch. Dann ist $F \vee G$ wahr falls G wahr ist, d.h. es muss gezeigt werden, dass G wahr ist.

Kurzum, man nimmt an dass F falsch ist und zeigt damit, dass G wahr ist. Alternativ kann man auch annehmen, dass G falsch ist und damit zeigen, dass F wahr ist. Man kann's auch so begründen: Die Formeln

$$F \vee G, \quad \neg F \rightarrow G, \quad \neg G \rightarrow F$$

sind äquivalent — man kann sich also aussuchen welche man beweisen möchte.

Beweis von $F \wedge G$. Da $F \wedge G$ nur dann wahr ist, wenn sowohl F als auch G wahr sind, muss man sowohl F als auch G beweisen. Der Beweis zerfällt also in zwei Schritte.

Aufgabe 36. Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Formulieren Sie in der Sprache der Prädikatenlogik:

- c ist das kleinste Element von M (d.h. $c \in M$ und für jedes Objekt x gilt, wenn $x \in M$ dann ist $x \geq c$).
- M hat ein kleinstes Element.
- M hat höchstens ein kleinstes Element. Die Menge
$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x > 1\}$$
hat beispielsweise kein kleinstes Element.
- Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein kleinstes Element.

Schreiben Sie jeweils dazu, welche Variablen frei bzw. gebunden sind.

Lösung von Aufgabe 36.

- c ist das kleinste Element von M.
$$c \in M \wedge \forall x\, (x \in M \to x \geq c).$$
c und M sind frei, x ist gebunden.
- M hat ein kleinstes Element.
$$\exists c\; c \in M \wedge \forall x\, (x \in M \to x \geq c).$$
M ist frei, c und x gebunden.
- M hat höchstens ein kleinstes Element.
$$\begin{aligned}&\forall c\, \forall d\\ &\qquad \Big(\big(c \in M \wedge \forall x\, (x \in M \to x \geq c)\big) \wedge\\ &\qquad\; \big(d \in M \wedge \forall x\, (x \in M \to x \geq d)\big)\Big)\\ &\quad \to c = d.\end{aligned}$$
M ist frei, c, d und x sind gebunden.
- Jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ hat höchstens ein kleinstes Element.
$$\begin{aligned}&\forall M\; M \subseteq \mathbb{R} \to \Big(\\ &\quad \forall c\, \forall d\\ &\qquad \Big(\big(c \in M \wedge \forall x\, (x \in M \to x \geq c)\big) \wedge\\ &\qquad\; \big(d \in M \wedge \forall x\, (x \in M \to x \geq d)\big)\Big)\\ &\quad \to c = d\Big)\end{aligned}$$
Alle Variablen sind gebunden.

Aufgabe 37. In einem Prolog Programm kann man z.B. schreiben

```
ancestor(X,Y) :- father(X,Y).
ancestor(X,Y) :- mother(X,Y).
```

Übersetzt in die Sprache der Prädikatenlogik bedeutet das

$\forall x\, \forall y\, (\text{father}(x,y) \to \text{ancestor}(x,y)) \wedge \forall x\, \forall y\, (\text{mother}(x,y) \to \text{ancestor}(x,y))$.

Zeigen Sie, dass diese Formel äquivalent ist zu

$$\forall x\, \forall y\, (\text{father}(x,y) \vee \text{mother}(x,y)) \to \text{ancestor}(x,y).$$

Übersetzen Sie auch die Prolog Anweisung

```
ancestor(X,Y) :- ancestor(X,Z), father(Z,Y)
```

in eine prädikatenlogische Formel und zeigen Sie dann durch Umformen, dass diese äquivalent zu

$$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, (\text{ancestor}(x,z) \wedge \text{father}(z,y)) \to \text{ancestor}(x,y))$$

ist.

Lösung von Aufgabe 37. Umformen ergibt

$$\begin{gathered}
\forall x\, \forall y\, \text{father}(x,y) \to \text{ancestor}(x,y) \wedge \forall x\, \forall y\, \text{mother}(x,y) \to \text{ancestor}(x,y) \\
\forall x\, \forall y\, (\text{father}(x,y) \to \text{ancestor}(x,y)) \wedge (\text{mother}(x,y) \to \text{ancestor}(x,y)) \\
\forall x\, \forall y\, (\neg\text{father}(x,y) \vee \text{ancestor}(x,y)) \wedge (\neg\text{mother}(x,y) \vee \text{ancestor}(x,y)) \\
\forall x\, \forall y\, (\neg\text{father}(x,y) \wedge \neg\text{mother}(x,y)) \vee \text{ancestor}(x,y) \\
\forall x\, \forall y\, \neg(\text{father}(x,y) \vee \text{mother}(x,y)) \vee \text{ancestor}(x,y) \\
\forall x\, \forall y\, (\text{father}(x,y) \vee \text{mother}(x,y)) \to \text{ancestor}(x,y)
\end{gathered}$$

Übersetzung in die Sprache der Prädikatenlogik:

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big((\text{ancestor}(x,z) \wedge \text{father}(z,y)) \to \text{ancestor}(x,y)\big).$$

Umformen ergibt

$$\forall x\, \forall y\, \forall z\, \big(\neg(\text{ancestor}(x,z) \wedge \text{father}(z,y)) \vee \text{ancestor}(x,y)\big)$$

Da z in $\text{ancestor}(x,y)$ nicht vorkommt, ist diese Formel äquivalent zu

$$\forall x\, \forall y\, \big(\forall z\, \neg(\text{ancestor}(x,z) \wedge \text{father}(z,y)) \vee \text{ancestor}(x,y)\big).$$

Umformen ergibt

$$\begin{gathered}
\forall x\, \forall y\, \big(\neg\exists z\, (\text{ancestor}(x,z) \wedge \text{father}(z,y)) \vee \text{ancestor}(x,y)\big) \\
\forall x\, \forall y\, \big(\exists z\, (\text{ancestor}(x,z) \wedge \text{father}(z,y)) \to \text{ancestor}(x,y)\big)
\end{gathered}$$

Aufgabe 38. Formulieren Sie einmal unter Verwendung von relativierten Quantoren und einmal unter Verwendung von normalen Quantoren folgende Aussage in der Sprache der Prädikatenlogik:

- Jeder Mensch ist sterblich.
- Es gibt eine kleinste natürliche Zahl.

Lösung von Aufgabe 38.

$$\forall x\ x \in \text{Mensch} \rightarrow x \in \text{Sterblich}$$
$$\forall x \in \text{Mensch}\ x \in \text{Sterblich}$$

$$\exists x\ x \in \mathbb{N} \wedge \forall y\ y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq_{\mathbb{N}} y.$$
$$\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ x \leq_{\mathbb{N}} y.$$

Aufgabe 39. In der Spiegel Online Ausgabe von 30.11.2006 stand zu lesen:

> Die klassische Vorlesung ist für Professoren und Studenten die bequemste Art der Begegnung.

Diese Erkenntnis zeitgenössischer Didaktik darf der maschinellen Verarbeitung nicht vorenthalten werden. Machen Sie sich's also gemütlich und übersetzen Sie die Aussage in die Sprache der Prädikatenlogik. Verwenden Sie hierbei folgende Relationen:

$$\begin{aligned} \text{begegnung} &= \{(x, y, z) \mid x \text{ ist Art der Begegnung zwischen } y \text{ und } z\} \\ \text{bequemer} &= \{(x, y, z) \mid x \text{ ist bequemer als } y \text{ für } z\} \\ \text{student} &= \{x \mid x \text{ ist Student}\} \\ \text{prof} &= \{x \mid x \text{ ist Prof}\}. \end{aligned}$$

An Konstanten brauchen Sie nur das Symbol vorlesung, das als "die klassische Vorlesung" interpretiert werden soll. Gehen Sie schrittweise vor und übersetzen Sie nacheinander folgende Aussagen in die Sprache der Prädikatenlogik:

- Die klassische Vorlesung ist eine Art der Begegnung zwischen Professoren und Studenten. Anders ausgedrückt: Für alle Objekte p und s gilt, dass wenn die klassische Vorlesung eine Begegnung zwischen p und s ist, p Professor und s Student ist.
- Die klassische Vorlesung ist das Bequemste für s. Anders ausgedrückt: Für alle Dinge b gilt, dass b die klassische Vorlesung ist oder die klassische Vorlesung bequemer als b für s ist.
- Die klassische Vorlesung ist für s die bequemste Art der Begegnung zwischen p und s. Anders ausgedrückt: Für jedes Ding b gilt, wenn b eine Art der Begegnung zwischen p und s ist, dann ist b die klassische Vorlesung oder die klassische Vorlesung ist bequemer als b für s.

- Wenn b eine Art der Begegnung zwischen p und s ist, dann ist b die klassische Vorlesung oder die klassische Vorlesung ist bequemer als b und zwar sowohl für p als auch für s.
- Für jeden Studenten s, für jeden Professor p und für jedes Ding b gilt, dass wenn b eine Art der Begegnung zwischen p und s ist, b die klassische Vorlesung ist oder die klassische Vorlesung bequemer ist als b und zwar sowohl für p als auch für s.

Hinweis: Sie dürfen relativierte Quantoren für die einstelligen Relationen verwenden, also z.B.

$$\forall x \in \text{student} \ldots \text{ statt } \forall x\, \text{student}(x) \rightarrow \ldots.$$

Überlegen Sie sich bei jeder Aussage welche Variablen frei und welche gebunden sind.

Lösung von Aufgabe 39. Die klassische Vorlesung ist eine Art der Begegnung zwischen Professoren und Studenten. Anders ausgedrückt: Für alle Objekte p und s gilt, dass wenn die klassische Vorlesung eine Begegnung zwischen p und s ist, p Professor und s Student ist.

$$\forall p, s\, \text{begegnung}(\text{vorlesung}, p, s) \rightarrow (\text{prof}(p) \wedge \text{student}(s)).$$

Die klassische Vorlesung ist das Bequemste für s. Anders ausgedrückt: Für alle Dinge b gilt, dass b die klassische Vorlesung ist oder die klassische Vorlesung bequemer als b für s ist.

$$\forall b\, b = \text{vorlesung} \vee \text{bequemer}(\text{vorlesung}, b, s).$$

Die klassische Vorlesung ist für s die bequemste Art der Begegnung zwischen p und s. Anders ausgedrückt: Für jedes Ding b gilt, wenn b eine Art der Begegnung zwischen p und s ist, dann ist b die klassische Vorlesung oder die klassische Vorlesung ist bequemer als b für s.

$$\begin{aligned} &\forall b\, \big(\text{begegnung}(b, p, s) \rightarrow \\ &\qquad \big(b = \text{vorlesung} \vee \text{bequemer}(\text{vorlesung}, b, s)\big)\big). \end{aligned}$$

Wenn b eine Art der Begegnung zwischen p und s ist, dann ist b die klassische Vorlesung oder die klassische Vorlesung ist bequemer als b und zwar sowohl für p als auch für s.

$$\begin{aligned} &\text{begegnung}(b, p, s) \rightarrow \\ &\qquad \big(b = \text{vorlesung} \vee \\ &\qquad\qquad (\text{bequemer}(\text{vorlesung}, b, p) \wedge \text{bequemer}(\text{vorlesung}, b, s))\big). \end{aligned}$$

Für jeden Studenten s, für jeden Professor p und für jedes Ding b gilt, dass wenn b eine Art der Begegnung zwischen p und s ist, b die klassische

Vorlesung ist oder die klassische Vorlesung bequemer ist als b und zwar sowohl für p als auch für s.

$$\begin{aligned}
&\forall p \in \text{prof}\ \forall s \in \text{student}\ \forall b \quad \Big(\text{begegnung}(b, p, s) \rightarrow \\
&\qquad \big(b = \text{vorlesung} \vee \\
&\qquad\qquad (\text{bequemer}(\text{vorlesung}, b, p) \wedge \text{bequemer}(\text{vorlesung}, b, s))\big)\Big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 40. Übersetzen Sie folgendes Zitat von Aristoteles in die Sprache der Prädikatenlogik:

> Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile.

Verwenden Sie folgende Symbole:

- Funktionen

$$\begin{aligned}
\text{teile}(x) &= \text{die Teile von } x \\
\text{summe}(x) &= \text{die Summe von } x
\end{aligned}$$

- Relationen

$$\text{mehrals} = \{(x, y) \mid x \text{ ist mehr als } y\}$$

- Konstanten

$$\text{ganze} = \text{das Ganze.}$$

Lösung von Aufgabe 40.

$$\text{mehrals}(\text{ganze}, \text{summe}(\text{teile}(\text{ganze}))).$$

Aufgabe 41. Übersetzen Sie folgendes Zitat von Aristoteles in die Sprache der Prädikatenlogik:

> Eine Schwalbe macht noch keinen Frühling.

Exakter ausgedrückt: Jede Menge von Dingen, die einen Frühling macht, enthält außer einer Schwalbe noch mindestens ein weiteres Objekt. Außer den prädikatenlogischen und mengentheoretischen Symbolen benötigen Sie folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
\text{macht} &= \{(x, y) \mid x \text{ macht } y\} \\
\text{schwalbe} &= \{x \mid\ x \text{ ist Schwalbe }\} \\
\text{frühling} &= \{x \mid\ x \text{ ist Frühling }\}
\end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 41.

$$\forall x\ \forall y \in \text{frühling}\ \big(\text{macht}(x, y) \rightarrow (\exists z_1 \in x\ z_1 \in \text{schwalbe} \wedge \exists z_2 \in x\ z_2 \neq z_1)\big).$$

Aufgabe 42. Sind für alle Aussagen F, G, H die beiden Aussagen

$$F \to (G \to H) \text{ und } (F \wedge G) \to H$$

äquivalent? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung von Aufgabe 42. Die Aussagen sind äquivalent. Die erste lässt sich in die zweite wie folgt umformen:

$$\begin{gathered} F \to (G \to H) \\ \neg F \vee (\neg G \vee H) \\ (\neg F \vee \neg G) \vee H \\ \neg(F \wedge G) \vee H \\ (F \wedge G) \to H. \end{gathered}$$

Alternativ kann man die Äquivalenz auch über Wertetabellen beweisen.

Aufgabe 43. Im alltäglichen Sprachgebrauch werden Konstantensymbole verwendet um konkrete Dinge zu benennen. So ist z.B. "7" ein Symbol (Schriftzeichen), das verwendet wird um die natürliche Zahl sieben zu benennen.

Oft werden für Konstantensymbolen nicht nur einzelne Schriftzeichen sondern Worte (Zeichenketten) verwendet. So ist z.B. "Sokrates" ein Konstantensymbol, das den berühmten griechischen Philosophen bezeichnet. Dass auch der Pudel meines Nachbarn Sokrates heißt, ist natürlich ein Problem. Die Bedeutung eines Konstantensymbols in einer Sprache sollte immer eindeutig sein. Ein Ausweg in der natürlichen Sprache besteht z.B. darin, dass man sagt "Sokrates von Athen". Auch diese Beschreibung ist nicht eindeutig. Formal gesehen handelt es sich hier um die Menge aller Sokratesse, deren Geburtsort Athen ist, d.h.

$$\{x \mid \text{Name}(x) = \text{Sokrates} \wedge \text{Geburtsort}(x) = \text{Athen}\}.$$

Nennen Sie die Konstanten-, Variablen-, Funktions-, und Relationssymbole in dieser Formel. Sokrates ist wieder ein Konstantensymbol, dessen Bedeutung jedoch nicht mehr ein Mensch ist sondern ...?

Sicher kennen Sie das Symbol sin und würden mir zustimmen, dass es sich dabei um ein einstelliges Funktionssymbol handelt. Um auszudrücken, dass die Sinus Funktion stetig ist, würde man in der Sprache der Prädikatenlogik schreiben

$$\text{stetig}(\text{sin}).$$

Rein syntaktisch gesehen kann in diesem Ausdruck sin kein Funktionssymbol sein, da ja sonst dahinter ein Term in Klammern kommen müsste. Was für Symbole sind stetig und sin hier?

Lösung von Aufgabe 43.

- Konstantensymbole: Sokrates, Athen
- Variablensymbole: x
- Funktionssymbole: Name, Geburtsort
- Relationssymbole: $=$.

Die Bedeutung des Konstantensymbols Sokrates ist der Name "Sokrates", d.h. eine Zeichenkette.

Das Symbol stetig ist ein einstelliges Relationssymbol, sin ist in diesem Kontext ein Konstantensymbol, das die Sinusfunktion bezeichnet.

Aufgabe 44. Definieren Sie was ein Term und eine atomare Formel ist.

Lösung von Aufgabe 44. Term:

- Jedes Konstantensymbol ist ein Term.
- Jedes Variablensymbol ist ein Term.
- Ist f ein n-stelliges Funktionssymbol und $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist auch
  $$f(t_1, \ldots, t_n)$$
  ein Term.

Atomare Formel:

- Ist P ein n-stelliges Relationssymbol und sind $t_1, \ldots, t_n$ Terme, dann ist
  $$P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$$
  eine atomare Formel.

Aufgabe 45. Schreiben Sie folgende Formeln ohne Verwendung von relativierten Quantoren.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ y > x.$$
$$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y > x.$$

Geben Sie zu jeder Formel an ob sie wahr oder falsch ist. (Begründung ist nicht erforderlich, eine falsche Antwort gibt aber Punktabzug.)

Lösung von Aufgabe 45.

$$\forall x\ x \in \mathbb{R} \to (\exists y\ y \in \mathbb{R} \wedge y > x).$$
$$\exists x\ x \in \mathbb{R} \wedge \forall y\ (y \in \mathbb{R} \to y > x).$$

Die erste Formel ist wahr, die zweite falsch.

Aufgabe 46. Beweisen Sie ausführlich dass für jede Relation R gilt:

$$\big(\exists y\ \forall x\ xRy\big) \to \big(\forall x\ \exists y\ xRy\big).$$

Hinweis: Gebunden Umbenennung!

Lösung von Aufgabe 46.

- Zu zeigen:
$$\big(\exists y\ \forall x\ xRy\big) \to \big(\forall x\ \exists y\ xRy\big).$$
- Annahme:
$$\exists y\ \forall x\ xRy.$$
  Zu zeigen:
$$\forall a\ \exists b\ aRb.$$
- Sei y so dass
$$\forall x\ xRy.$$
- Sei a beliebig aber fest. Zu zeigen:
$$\exists b\ aRb.$$
- Mit der Wahl $x = a$ gilt
$$aRy.$$
- Konstruiere ein b so dass aRb. Wähle $b = y$.

Aufgabe 47. Erklären Sie in 3-4 Sätzen was eine Definition und was ein Theorem ist.

Lösung von Aufgabe 47. In einer Definition wird ein neuer Begriff auf unmissverständliche und eindeutige Weise erklärt. Bei dieser Erklärung dürfen nur bereits zuvor definierte Begriffe verwendet werden. Ein Theorem ist eine wahre Aussage über zuvor definierte Begriffe. Die Aussage kann mit Mitteln der Logik bewiesen werden.

Aufgabe 48. Der Beweis dass $1 = 2$ ist, sieht wie folgt aus:

- Zu zeigen:
$$1 = 2.$$
- Multiplikation mit Null auf beiden Seiten liefert
$$0 = 0.$$
  Diese Aussage ist offensichtlich wahr, also ist $1 = 2$ bewiesen.

Überlegen Sie sich an welcher Stelle ein falscher Beweisschritt gemacht wurde. Hinweis: Es liegt nicht daran, dass man "mit Null nicht multiplizieren darf". Tatsächlich ist die Aussage

$$1 = 2 \rightarrow 0 = 0$$

wahr, was man anhand einer Wahrheitstabelle leicht verifizieren kann.

Lösung von Aufgabe 48. Der entscheidende Fehler beim Beweis ist, dass die zu zeigende Aussage als Annahme genommen wurde. Im Beweis wurde $1 = 2$ angenommen und daraus die wahre Aussage $0 = 0$ abgeleitet. Dies bedeutet natürlich nicht, dass $1 = 2$ wahr ist.

Wenn man aus der Annahme $0 = 0$ ableiten könnte dass $1 = 2$ ist, dann wäre in der Tat $1 = 2$ bewiesen.

Aufgabe 49. Sei F eine Aussage, für die

$$F \rightarrow \neg F$$

wahr ist. Zeigen Sie dass F falsch ist.

Lösung von Aufgabe 49. Beweis durch Wahrheitstabelle:

F	$F \rightarrow \neg F$
1	0
0	1

Der einzige Fall, in dem $F \rightarrow \neg F$ wahr ist, ist wenn F falsch ist.

Alternativ kann man $F \rightarrow \neg F$ aussagenlogisch umformen in $\neg F \vee \neg F$, was äquivalent zu $\neg F$ ist.

Aufgabe 50. Formulieren Sie in der Sprache der Prädikatenlogik:

- Es gibt mindestens zwei x mit der Eigenschaft $P(x)$.
- Es gibt höchstens zwei x mit der Eigenschaft $P(x)$.

In den Formeln dürfen keine Relationssymbole außer P und der Gleichheit vorkommen.

Lösung von Aufgabe 50.

- $\exists x\ \exists y\ x \neq y \wedge P(x) \wedge P(y)$.
- $\forall x\ \forall y\ \forall z\ (P(x) \wedge P(y) \wedge P(z)) \rightarrow (x = y \vee x = z \vee y = z)$.

Aufgabe 51. Formulieren Sie in der Sprache der Prädikatenlogik, dass es keine natürliche Zahl gibt, die größer oder gleich wie alle natürlichen Zahlen ist. Sie dürfen relativierte Quantoren verwenden, in der Formel dürfen aber keine Relationssymbole außer $\in$ und $\geq_{\mathbb{N}}$ auftreten.

Lösung von Aufgabe 51.

$$\neg\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\; x \geq_{\mathbb{N}} y.$$

Aufgabe 52. Was versteht man unter der Beweisregel “Modus Ponens”? Wie kann man zeigen, dass diese Beweisregel korrekt ist?

Lösung von Aufgabe 52. Modus Ponens besagt, dass man aus der Wahrheit zweier Aussagen F und $F \to G$ die Wahrheit der Aussage G folgern kann. Die Korrektheit der Beweisregel lässt sich mit einer Wahrheitstabelle zeigen.